

УДК 519.651

МЕТОД КОНСЕРВАТИВНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ НА НЕСТЫКУЮЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ СЕТКАХ¹⁾**А.С. КАРАВАЕВ, С.П. КОПЫСОВ***Институт механики УрО РАН, г. Ижевск**E-mail: karavaev-alexander@yandex.ru; s.kopysov@gmail.com***CONSERVATIVE REMAPPING METHOD ON SURFACE MESHES****A.S. KARAVAEV, S.P. KOPYSOV***Institute of Mechanics UB RAS, Izevsk***Аннотация**

Рассматривается задача консервативной интерполяции расчетных параметров между нестыкующимися поверхностными сетками. Разработан метод интерполяции на основе воксельного представления расчетной сетки с последующей оценкой площади пересечения каждого вокселя с ячейками. Метод позволяет рассматривать задачи с криволинейными поверхностями.

Ключевые слова: консервативная интерполяция, декартова сетка вокселей, поверхностная треугольная сетка

Summary

Conservative interpolation problem of numerical parameters between surface meshes is considered. The interpolation method based on voxel representation of computational mesh with subsequent intersection area evaluation of each voxel with mesh cells is developed. Method allows to solve problems with curved surfaces.

Key words: Conservative interpolation, voxel grid, surface triangle mesh.

Введение

При решении сопряженных задач взаимодействия потока газа и деформируемой конструкции (тела) согласование получаемых решений на границах подобластей является неотъемлемым и весьма важным этапом, существенно влияющим на адекватность получаемых результатов. Под согласованием понимается прежде всего совокупность операций по обмену результатами вычислений между соответствующими решателями, интерполяции значений между узлами несогласованных расчетных сеток и, возможно, реализация семейства итерационных процедур при жестком связывании.

Рассмотрим задачу интерполяции решения на границе подобластей, каждая из которых может содержать произвольные пространственные ячейки (шестигранники, тетраэдры) и на границе взаимодействия сетки не согласованы. Основными требованиями решения этой задачи являются: простота, экономичность, точность и выполнение законов сохранения (консервативности) интегральных параметров ячеек (массы, импульса, энергии).

Одним из подходов решения задачи консервативной интерполяции является метод дискретной перестройки [1]. Здесь каждая расчетная ячейка разбивается на большое количество мелких частиц, а затем для подсчета массы новой ячейки определяются те частицы, которые попадают в нее.

¹⁾Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-00055-а).

Еще один подход основан на переносе интерполируемых параметров через предварительно построенную «суперсетку», состоящую из узлов и пересечений ребер старой и новой сеток [2]. В данном случае рассмотрение трехмерных сеток тоже становится не очевидным для случая несогласованных сеток на границе.

Метод консервативной интерполяции физических величин с одной разностной регулярной гексаэдральной сетки на другую рассмотрен в [3]. Грани ячеек полагаются плоскими треугольными. В [4] предложен метод решения задачи консервативной интерполяции интегральных параметров ячеек плоских сеток с криволинейными границами как задачи об отыскании «массы» ячеек новой сетки по известной «массе» ячеек старой сетки. Обобщение данного метода на трехмерный случай по мнению авторов не представляет значительных трудностей.

В основе предлагаемого метода консервативной интерполяции расчетных параметров заданных на поверхностной сетке лежит идея воксельного представления расчетной сетки [5] с последующей оценкой площади пересечения каждого вокселя с ячейками сеток. Метод позволяет рассматривать задачу интерполяции на криволинейных поверхностях, когда определение геометрического пересечения ячеек сеток является невозможным.

1. Постановка задачи интерполяции

Пусть существует функция $\rho(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, определенная на всей области задачи Ω . Для определенности будем рассматривать $\rho(\mathbf{r})$, как функцию плотности. Функция определяется ее средним значением в каждой ячейке t^a базовой сетки \mathcal{T}^a : $\bar{\rho}^{t^a} = \int_{t^a} \rho(\mathbf{r}) dV / V^{t^a}$, где V^{t^a} объем ячейки t^a . Масса ячейки равна $m^{t^a} = \int_{t^a} \rho(\mathbf{r}) dV$ и тогда $\bar{\rho}^{t^a} = m^{t^a} / V^{t^a}$. Следовательно, масса всей сетки \mathcal{T}^a вычисляется как $M^{\mathcal{T}^a} = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) dV = \sum_{t^a} \int_{t^a} \rho(\mathbf{r}) dV = \sum_{t^a} m^{t^a} = \sum_{t^a} \bar{\rho}^{t^a} V^{t^a}$.

Задача интерполяции состоит в нахождении аппроксимации для масс новых ячеек $\tilde{m}^{t^b} \approx m^{t^b} = \int_{t^b} \rho(\mathbf{r}) dV$, где m^{t^b} неизвестная масса новой ячейки $t^b \in \mathcal{T}^b$. Среднее значение плотности новых ячеек определяется как $\tilde{\rho}^{t^b} = \tilde{m}^{t^b} / V^{t^b}$. В случае, когда $\rho(\mathbf{r})$ является глобальной линейной функцией $\rho(\mathbf{r}) = a + bx + cy + dz$, процесс переноса значений плотности является точным $\tilde{m}^{t^b} = \int_{t^b} \rho(\mathbf{r}) dV$. Это свойство интерполяции можно рассматривать как сохранение линейности. Также необходимым условием является консервативность $M^{\mathcal{T}^a} = \sum_{t^a} m^{t^a} = \sum_{t^a} \tilde{m}^{t^b} = M^{\mathcal{T}^b}$, то есть после интерполяции общая масса остается неизменной.

Еще одним важным требованием является локальное сохранение экстремальных значений плотности $\bar{\rho}_{\max}^{t^a} \geq \bar{\rho}^{t^b} \geq \bar{\rho}_{\min}^{t^a}$, $\bar{\rho}_{\max}^{t^a} = \max_{t^a \in \mathcal{T}(t^b)} \bar{\rho}^{t^a}$, $\bar{\rho}_{\min}^{t^a} = \min_{t^a \in \mathcal{T}(t^b)} \bar{\rho}^{t^a}$ в некоторой окрестности $\mathcal{T}(t^b)$ ячейки t^b .

В рассматриваемой работе представление «массы» ячеек новой сетки \mathcal{T}^b осуществляется через линейную комбинацию известных «масс» ячеек старой сетки \mathcal{T}^a . В случае поверхностных треугольных сеток при вычислении массы ячейки объем заменяется на ее площадь $m^t = \int_t \rho(\mathbf{r}) dS$.

Разработанный алгоритм состоит из следующих основных этапов: построение декартовой сетки вокселей; определение площадей пересечений вокселей с ячейками сеток; вычисление массы ячеек сетки \mathcal{T}^b .

2. Построение декартовой сетки вокселей

Построение декартовой сетки \mathcal{V} начинается с определения шага воксельной решетки h , который выбирался как половина длины минимального ребра для сеток $\mathcal{T}^a, \mathcal{T}^b$, $h = \min(L_{\min}^{\mathcal{T}^a}, L_{\min}^{\mathcal{T}^b})/2$. В этом случае каждый воксель содержит лишь одну вершину для каждой из сеток $\mathcal{T}^a, \mathcal{T}^b$.

Прямым перебором всех значений осуществляется поиск вокселей пересекающих треугольные ячейки сеток $\mathcal{T}^a, \mathcal{T}^b$. Воксели, имеющие в качестве пересечения с треугольной ячейкой некоторый многоугольник, определяются как «помеченные» (см. рис. 1 а,б,в) и формируют список $\Upsilon \subset \mathcal{V}$ «помеченных» вокселей. Воксели, не пересекающиеся с треугольными ячейками, а также имеющие в качестве пересечения точки и отрезки, пропускаются алгоритмом (см. рис. 1 г).

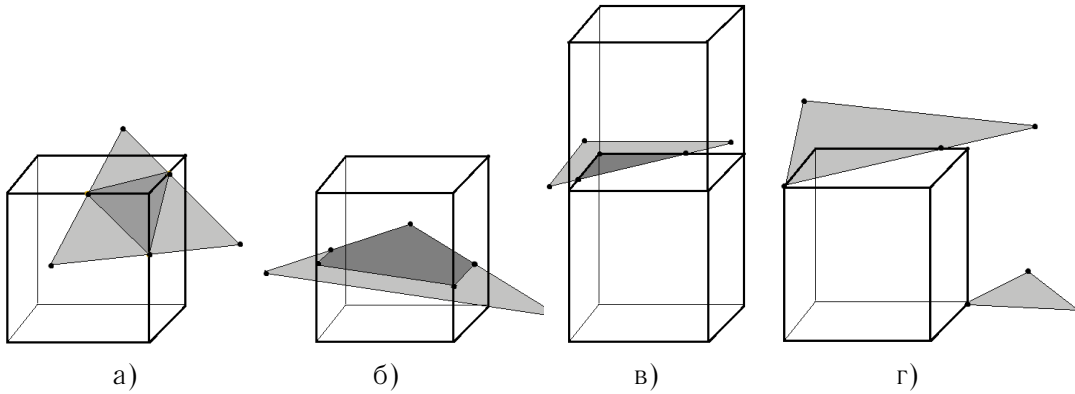


Рис. 1: Варианты пересечения: идентификация «помеченных» вокселей а,б,в), ячейки пропускаемые алгоритмом г).

Особым случаем является вариант, когда треугольник лежит в одной плоскости с гранью вокселя и пересекает эту грань. В этом случае (рис. 1 в) треугольник пересекает «верхний» и «нижний» воксели. Здесь один воксель определится как «помеченный», а другой пропускается алгоритмом. Например, выбирается воксель, имеющий минимальную координату по оси $X'X$. Если минимальные координаты по оси абсцисс равны, тогда проверяются минимальные координаты по оси ординат. Последней проверкой является ось $Z'Z$. Так на рисунке 1 в), «помеченным» будет определен «нижний» воксель, имеющий минимальную координату по оси аппликат.

3. Вычисление площадей пересечений вокселей с ячейками сеток.

Процедура вычисления площади пересечения вокселя ν и треугольника t состоит из 2-х шагов: первый — формирование списка Λ всех возможных точек пересечения вокселя и треугольника; второй — построение на точках пересечения треугольной сетки с последующим суммированием площади каждого треугольника.

После добавление в список Λ всех возможных точек пересечения, возникает задача вычисления площади области пересечения ограниченной данными точками. Рассмотрим треугольник t и воксель ν изображенные на рис. 2 а), список Λ состоит из шести точек $p_i, i = 1 \dots 6$, которые были получены в результате проверки пересечения ребер треугольника с гранями вокселя. Точку p определим как геометрический центр точек p_i , $p = (\sum_i p_i)/6$.

Задача определения площади пересечения (более темная область выделена на рис. 2 а,б), сводится к задаче сложения площадей треугольников $\triangle pp_1p_2, \triangle pp_2p_3, \triangle pp_3p_4, \triangle pp_4p_5, \triangle pp_5p_6, \triangle pp_1p_6$, изображенных на рисунке 2 б).

Таким образом, любой «помеченный» воксель $\nu \in \Upsilon$ имеет некоторые площади пересечения S_ν^a, S_ν^b с ячейками сеток $\mathcal{T}^a, \mathcal{T}^b$ соответственно, при этом $S_\nu^a = \sum_{i=1 \dots l} S_{\nu_i}^{m_a}$, где $S_{\nu_i}^{m_a}$ площадь пересечения i -ой ячейки сетки \mathcal{T}^a с вокселем ν , l — число таких ячеек. Величина S_ν^b вычисляется аналогично.

4. Вычисление «массы» ячеек сетки \mathcal{T}^b .

В предлагаемом методе задача нахождения массы ячейки $t^b \in \mathcal{T}^b$ сводится к задаче нахождения ее площади S^b через вклады площадей ячеек сетки \mathcal{T}^a пересекающих t^b , то есть нахождение ячейки

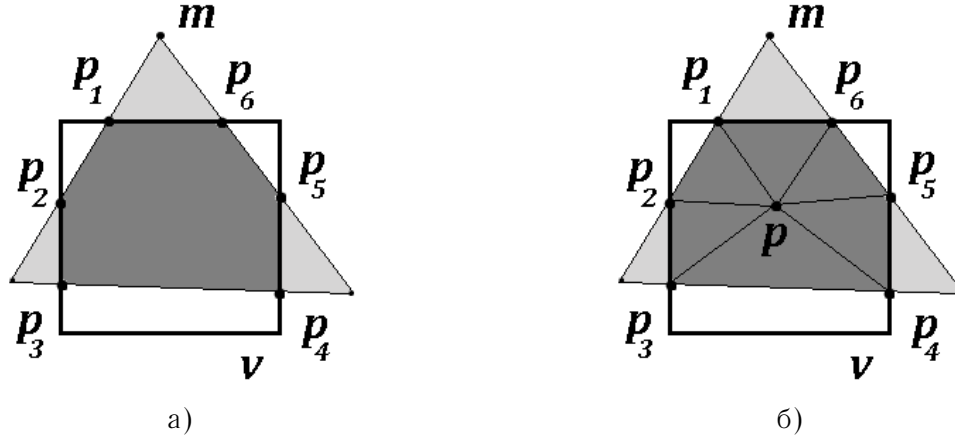


Рис. 2: Вычисление площади пересечения треугольника t и вокселя ν : а) — определения точек пересечения, б) построение треугольной сетки в области пересечения (выделена темным цветом)

$t_i^a \in \mathcal{T}^a, t_i^a \cap t^b \neq \emptyset$ и коэффициентов $\alpha_i \in R^+$, что $S^b = \sum_{i=1 \dots n} \alpha_i S_i^a$, где S_i^a площадь t_i^a . Тогда масса ячейки t^b находится как $m^b = \sum_{i=1 \dots n} \alpha_i \bar{\rho}_i S_i^a$, где $\bar{\rho}_i$ среднее значение плотности t_i^a . Необходимым условием является существование хотя бы одного «помеченного» вокселя, пересекающего как ячейку t^b , так и ячейки t_i^a , то есть $\forall t_i^a \exists \nu$, такой, что $t_i^a \cap \nu \neq \emptyset$ и $t^b \cap \nu \neq \emptyset$.

Отметим, что геометрическое пересечение ячеек t_i^a и t^b заменяется на условие пересечения каждой из них «помеченного» вокселя, то есть, эталонный «геометрический» вариант пересечения заменяется на «воксельный». Пусть $S^b = \sum_{i=1 \dots n} \alpha_i S_i^a$ и $S^b = \sum_{j=1 \dots n'} \alpha'_j S_j^a$ — «геометрическое» и «воксельное» выражение площади ячейки t^b соответственно, тогда $\exists j$, что $\forall i \alpha_i \neq \alpha'_j$ и $S_i^a \neq S_j^a$.

«Воксельное» представление площади ячеек сетки \mathcal{T}^b позволяет проводить расчеты в случаях криволинейных поверхностных сеток в пространстве, когда вычисление геометрического пересечения ячеек затруднено.

Пусть треугольник t^b пересекает воксели $\nu^j, j = 1 \dots k$, тогда площадь ячейки t^b можно записать в виде $S^b = \sum_{j=1 \dots k} S_{\nu^j}^{t^b}$, где $S_{\nu^j}^{t^b}$ площадь пересечения треугольника t^b с вокселем ν^j . Далее для каждого вокселя ν^j можно вычислить долю площади пересечения ω_j^b , которую занимает ячейка t^b в общей площади пересечения $S_{\nu^j}^{t^b}$ сетки \mathcal{T}^b с вокселем ν^j , $\omega_j^b = S_{\nu^j}^{t^b} / S_{\nu^j}^b$. С другой стороны существует некоторая площадь пересечения вокселя ν_j с ячейками сетки \mathcal{T}^a , $S_{\nu_j}^a = \sum_{i=1 \dots l} S_{\nu_j^i}^{t^a}$, где $S_{\nu_j^i}^{t^a}$ площадь пересечения i -ой ячейки сетки \mathcal{T}^a с вокселем ν_j . Принимая общие площади пересечения вокселя ν^j с сетками $\mathcal{T}^a, \mathcal{T}^b$ равными $S_{\nu_j}^a = S_{\nu_j}^b$, получаем, что $S_{\nu_j}^b = \omega_j^b S_{\nu_j}^b = \omega_j^b S_{\nu_j}^a = \omega_j^b \sum_{i=1 \dots l} S_{\nu_j^i}^{t^a} = \sum_{i=1 \dots l} \omega_j^b S_{\nu_j^i}^{t^a}$. Откуда $S^b = \sum_{j=1 \dots k} \sum_{i=1 \dots l} \omega_j^b S_{\nu_j^i}^{t^a} = \sum_{i=1 \dots l} \sum_{j=1 \dots k} \omega_j^b S_{\nu_j^i}^{t^a}$. Величина $\sum_{j=1 \dots k} \omega_j^b S_{\nu_j^i}^{t^a}$ составляет некоторую часть площади S_i^a треугольника t_i^a , которая получается сложением площадей пересечений ячейки t_i^a с вокселями $\nu^j, j = 1 \dots k$. Таким образом, $\alpha_i = \sum_{j=1 \dots k} \omega_j^b S_{\nu_j^i}^{t^a} / S_i^a$ и получаем, что $S^b = \sum_{i=1 \dots l} \alpha_i S_i^a$.

Схематично метод рассматриваемой интерполяции можно представить в следующем виде:

- 1: Построение декартовой воксельной решетки \mathcal{V} размерности $\dim V = \dim_z \times \dim_y \times \dim_x$ на расчетной области
- 2: **for** $z = 1; z < \dim_z; z++$ **do**
- 3: **for** $y = 1; y < \dim_y; y++$ **do**

```

4:   for  $x = 1; x < dim_x; x++$  do
5:     for all  $t^a \in \mathcal{T}^a$  do
6:       Вычислить площадь  $S_\nu^{t^a}$  пересечения треугольника  $t^a$  с вокселем  $\nu_{(x,y,z)} \in \mathcal{V}$ 
7:       if  $S_\nu^{t^a} > 0$  then
8:         Добавить  $\nu_{(x,y,z)}$  в список «помеченных» вокселей  $\Upsilon$ 
9:       end if
10:    end for
11:    for all  $t^b \in \mathcal{T}^b$  do
12:      Вычислить площадь  $S_\nu^{t^b}$  пересечения треугольника  $t^b$  с вокселем  $\nu_{(x,y,z)} \in \mathcal{V}$ 
13:      if  $S_\nu^{t^b} > 0$  then
14:        Добавить  $\nu_{(x,y,z)}$  в список «помеченных» вокселей  $\Upsilon$ 
15:      end if
16:    end for
17:  end for
18: end for
19: end for
20: for all  $\nu \in \Upsilon$  do
21:   Для  $\nu$  вычислить величины  $S_\nu^a, S_\nu^b$ 
22: end for
23: for all  $t^b \in \mathcal{T}^b$  do
24:   Для  $t^b$  вычислить выражение  $m^b = \sum_{i=1\dots l} \alpha_i \bar{\rho}_i^a S_i^a$ 
25: end for

```

Отметим, что на практике могут возникать, случаи когда находятся воксели пересекающие треугольники сетки \mathcal{T}_b , но при этом не пересекающиеся с сеткой \mathcal{T}_a , то есть $\exists \nu \in \Upsilon$ и $\exists t^b \in \mathcal{T}_b$ такой, что $\nu \cap \mathcal{T}_a = \emptyset, \nu \cap t^b \neq \emptyset$. В этом случае необходимо найти некоторый воксель $\nu' \in \Upsilon$, лежащий в непосредственной близости к ν , который является «помеченным» для сетки \mathcal{T}_a . Далее при вычислении «воксельной» площади использовать для сетки \mathcal{T}_a воксель ν' вместо ν .

Поиск вокселя ν' необходимо осуществлять обходом вдоль координатных осей по направлению оси, имеющей максимальное скалярное произведение с нормалью \mathbf{n} треугольника t^b .

Необходимость поиска нового вокселя возникает также в случае разной точности описания криволинейной границы для сеток $\mathcal{T}_a, \mathcal{T}_b$. Одним из таких примеров служит интерполяция более грубой сетки \mathcal{T}_a на \mathcal{T}_b , описывающих поверхность сферы.

Проведена серия численных расчетов по проверке теоретических свойств алгоритма, выполнено его распараллеливание и продемонстрирована его производительность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Horac H.G., Jones E.M., Kodis J.W. An algorithm for the discrete rezoning of Lagrangian meshes // Comput. Physics. — 1978. — V. 26. — P. 277.
2. Farrell P.E., Piggott M.D., Pain C.C., Gorman G.J., Wilson C.R. Conservative interpolation between unstructured meshes via supermesh construction // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. — 2009. — V. 198. — P. 2632–2642.
3. Азаренок Б.Н. Об одном методе консервативной интерполяции на гексаэдральных сетках // Математическое моделирование. — 2008. — Т. 20, № 2. — С. 59–75.
4. Аганин А.А., Кузнецов В.Б. Метод консервативной интерполяции интегральных параметров ячеек произвольных сеток // В Сб. «Динамика оболочек в потоке». — Казань, 1985. — Вып. 18. — С. 144–160.
5. Караваев А.С., Копысов С.П. Метод построения неструктурированных шестигранных сеток из объемных данных // Компьютерные исследования и моделирование. — 2013. — Т. 5, № 1. — С. 11–24.

REFERENCES

1. **Horac H.G., Jones E.M., Kodis J.W.** An algorithm for the discrete rezoning of Lagrangian meshes // Comput. Physics. – 1978. – V. 26. – P. 277.
2. **Farrell P.E., Piggott M.D., Pain C.C., Gorman G.J., Wilson C.R.** Conservative interpolation between unstructured meshes via supermesh construction // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – 2009. – V. 198. – P. 2632–2642.
3. **Azarenok B.N.** A method for conservative remapping on hexahedral meshes // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2009. – V. 1, Is. 1. – P. 51–63.
4. **Aganin A.A., Kuznezov V.B.** Conservative remapping method of integral parameters for arbitrary meshes [Metod konservativnoj interpolyatsii integral'nyh parametrov yacheek proizvol'nyh setok] // Dinamika obolochek v potoke. – Kazan, 1985. – Is. 18. – P. 144–160 (in Russian).
5. **Karavaev A.C., Kopysov S.P.** The method of unstructured hexahedral mesh generation from volumetric data [Metod postroeniya nestrukturirovannyh shestigrannyh setok iz ob"emnyh dannyh] // Komp'uternye issledovaniya i modelirovanie. – 2013. – V. 5, № 1. – P. 11–24 (in Russian).